

## NOMBRES REALS: EXERCICIS

1. Calcula la longitud dels segments indicats a continuació. Expressa'n el resultat de manera exacta i utilitza la calculadora per obtenir-ne una aproximació arrodonida als centèsims:
  - a) La diagonal d'un rectangle de costats 3 i 5 cm.
  - b) El diàmetre d'una circumferència de longitud 10 cm.
  - c) L'altura d'un triangle equilàter de 4 cm de costat.
  - d) L'altura d'un con de 6 cm de radi i 9 cm de generatriu.
2. Classifica els nombres següents en racionals i irracionals:
  - a)  $2'04\widehat{5}$
  - b)  $-3'88080080008\dots$
  - c)  $1\widehat{9}$
  - d)  $\frac{113}{114}$
  - e)  $4'3131131113\dots$
  - f)  $0'58421$
3. Indica quins d'aquests nombres són irracionals:
  - a)  $\sqrt{25}$
  - b)  $1 + \pi$
  - c)  $\sqrt{5} + 3$
  - d)  $5e$
  - e)  $3 + 2\sqrt{49}$
  - f)  $7\sqrt{5}$
  - g)  $\sqrt{16 + 9}$
  - h)  $\sqrt{25 + 36}$
  - i)  $\sqrt{2(16 + 9)}$
4. Per què el número  $\frac{1\widehat{2} + 0'25}{0'1\widehat{6}}$  no pot ser irracional?
5. Compara aquests parells de nombres reals:
  - a)  $\frac{7}{5}$  i  $\sqrt{2}$
  - b)  $1 - \sqrt{3}$  i  $-0'73$
  - c)  $\pi$  i  $\sqrt{10}$
  - d)  $-1'9$  i  $-2$
  - e)  $-\sqrt{6}$  i  $-\sqrt{7}$
  - f)  $4'9$  i  $5$
  - g)  $\frac{\sqrt{10}}{8}$  i  $\frac{\sqrt{10}}{9}$
  - h)  $-1'3\widehat{9}$  i  $-1'4$
6. Ordena de més petit a més gran els nombres reals següents i col·loca el signe de desigualtat corresponent:  
 $2'45$  ;  $2'99$  ;  $2\widehat{9}$  ;  $-\sqrt{2}$  ;  $-1'42$  ;  $0$  ;  $\frac{5}{2}$
7. Escriu dos nombres racionals compresos entre:
  - a)  $\sqrt{5}$  i  $\sqrt{6}$
  - b)  $-\sqrt{2}$  i  $-\sqrt{3}$
  - c)  $4$  i  $\sqrt{17}$
  - d)  $e$  i  $\pi$

8. Les operacions amb nombres irracionals que s'indiquen a continuació donen com a resultat un nombre racional. Calcula'l en cada cas:

a)  $(\sqrt{10})^2$

d)  $(7\pi - 2\pi) : 3\pi$

b)  $(15 + 2\sqrt{3})(15 - 2\sqrt{3})$

e)  $(\sqrt{6})^2 - \frac{2}{3}$

c)  $(3\sqrt{7})^2$

f)  $\sqrt{(7 - \sqrt{2})(7 + \sqrt{2})} - 11$

9. Extreu factor comú:

a)  $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

b)  $7\pi - 3\pi + \pi$

c)  $4\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$

d)  $\sqrt{5a} + \sqrt{5b} - \sqrt{5c}$

10. Extreu factor comú:

a)  $x^2y + xy^2$

b)  $x(y + z) + t(y + z)$

c)  $z^3 + z^2 - z$

d)  $x^2 + 2xy + y^2 + t(x + y)$

11. Aproxima per defecte i per excés fins als mil·lèsims cadascun dels nombres irracionals següents:

a)  $\sqrt{17}$

b)  $e$

c)  $\pi$

12. Escriu tres aproximacions per defecte i tres aproximacions per excés de:

a)  $\sqrt{5} = 2'236067977\dots$

b)  $\sqrt{8} = 2'828427125\dots$

13. El nombre  $\sqrt{5} = 2'236067977\dots$

a) arrodonit als centèsims és:

b) truncat als centèsims és:

c) truncat als mil·lèsims és:

d) arrodonit als mil·lèsims és:

14. Indica, fent servir la calculadora, quines d'aquestes aproximacions s'han fet per truncament i quines per arrodoniment:

a)  $\sqrt{2} = 1'41$

d)  $\sqrt{11} = 3'31$

b)  $\sqrt{8} = 2'83$

e)  $\sqrt{7} = 2'65$

c)  $\sqrt{6} = 2'44$

f)  $\sqrt{13} = 3'60$

15. Una aproximació per truncament del número 4'56789 és 4'56. Calcula'n l'error absolut i l'error relatiu.

16. L'estatura d'en Lluís és de 1'847 m. L'Anna diu que en Lluís mesura 1'85 m i l'Eva diu que mesura 1'84 m. Qui s'aproxima de manera més precisa? Per què?
17. Les vendes d'un hipermercat durant quatre dies van ser de 91.243 €, 84.568 €, 62.324 € i 44.876 €. Fes l'estimació total de les vendes arrodonint a les centenes cada un dels ingressos i calcula l'error comès. Calcula també l'error si en lloc d'arrodonir cada un dels ingressos els trunquem a les centenes.
18. Escriu l'aproximació fins als mil·lèsims de  $\pi$  per arrodoniment i per truncament. Indica, en cada cas, una fita de l'error absolut comès.
19. Troba una fita de l'error absolut i de l'error relatiu comesos en aproximar el nombre d'or ( $\phi = 1'6180339887\dots$ ) per:
- a) 1                      b) 1'6                      c) 1'61                      d) 1'62
20. Un poble té dues piscines municipals amb capacitats de 230.000 litres i 130.000 litres, respectivament. Un treballador diu que la piscina gran té una capacitat de 200.000 l i la petita, de 100.000 l. Quina aproximació és més precisa? Per què?
21. En mesurar la longitud d'una carretera hem obtingut 14 km amb un error absolut menor que 8 m i, en mesurar la longitud d'una canonada, hem obtingut 5 m amb un error absolut menor que 3 cm. Quina de les dues mesures és més precisa? Per què?
22. Mesurem la massa d'un objecte en una balança i obtenim 2'3 kg. Si la fita de l'error és 10 g, entre quins dos valors està compresa la seva massa exacta?
23. Què significa que el resultat de mesurar una longitud s'escrigui  $(50'0 \pm 0'5)$  cm?
24. Expressa en la forma  $x \pm \Delta$  una magnitud el valor de la qual pot estar entre 56'72 i 57'14.
25. Escriu en notació científica:
- a) 0'000043                      b) 12 centèsims  
c) 143.260.000.000                      d) el nombre de segons de quaranta segles
26. Efectua aquestes operacions amb l'ajut de la calculadora. Expressa'n el resultat en notació científica:
- a)  $2 \cdot 0'000001$                       b)  $2500 \cdot 18000000$                       c)  $2'5 \cdot 10^4 + 10^5 - 6'25 \cdot 10^3$   
d)  $374 \cdot 10^{-10} \cdot 1'8 \cdot 10^{18}$                       e)  $(10^4 - 10^7)^2$                       f)  $\frac{1'25 \cdot 10^{12} - 10^{12}}{10^{10} + 5 \cdot 10^9}$

27. Representa a la recta real els conjunts de nombres següents. Defineix-los després mitjançant desigualtats:
- |                   |                    |                   |
|-------------------|--------------------|-------------------|
| a) $[4, +\infty)$ | b) $(-\infty, -2)$ | c) $[1, 3]$       |
| d) $(2, 5)$       | e) $[-3, 0)$       | f) $(0, 3]$       |
| g) $(5, +\infty)$ | h) $[-2, 2)$       | i) $(-\infty, 0)$ |
28. Expressa mitjançant intervals els conjunts de nombres reals que verifiquen:
- |                  |                    |                       |
|------------------|--------------------|-----------------------|
| a) $x \geq -3$   | b) $x < 4$         | c) $-2 \leq x \leq 3$ |
| d) $-5 < x < -1$ | e) $-4 < x \leq 6$ | f) $x > 7$            |
29. Troba les solucions de les següents inequacions, escriu-les en forma d'interval i representa-les sobre la recta real:
- |                      |                              |                                       |
|----------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| a) $4x - 3 < 0$      | b) $3 - 4x < 0$              | c) $1 - x \geq 4$                     |
| d) $\frac{x}{2} < 5$ | e) $\frac{x}{-2} < 5$        | f) $\frac{2x}{3} - 1 > 0$             |
| g) $-x + 5 \geq 0$   | h) $1 - \frac{2x}{3} \leq 0$ | i) $7(2x - 1) - 3x \leq 2(x + 1) - 9$ |
30. Les solucions d'una inequació es troben a l'interval  $[-5, 2)$  i les d'una altra inequació, a l'interval  $[0, 4)$ . Expressa mitjançant un interval les solucions comunes a totes dues inequacions. Ajuda't d'un gràfic.
31. Les inequacions  $x - 3 \leq 0$  i  $2(x - 1) < 5x + 1$  tenen solucions comunes. Troba-les, expressa-les en forma d'interval i representa-les gràficament.
32. (PAU, Juny 2005) La funció  $f(x) = \frac{90x + 100}{x + 5}$  indica el nombre de minuts que s'aconsella de caminar diàriament en funció del nombre  $x$  de setmanes que han passat des que es va començar un programa de manteniment. Segons aquest programa de manteniment, a partir de quina setmana s'ha de caminar més d'una hora?
33. El sou dels venedors d'una empresa consta d'una part fixa de 1200 € més una comissió d'un 8% per les vendes realitzades. A quant ha d'ascendir les seves vendes perquè els sous estiguin compresos entre 1400 € i 1800 €?
34. Una empresa tèxtil ha fabricat 1500 camises amb un cost de producció de 3 € per unitat. Si venent totes les camises obté un benefici de més de 6000 €, a quin preu ven cada unitat?

35. Una editorial ofereix a un autor dos tipus de contracte:  
 A) 25000 € fixos més un 10% del preu de cada llibre venut.  
 B) El 30% del preu de cada llibre venut.  
 Si el preu de cada exemplar és de 35 €, a partir de quants exemplars venuts li resultarà més beneficiosa a l'autor l'opció B?
36. Tot i que a primer cop d'ull no ho sembli, els resultats de les arrels següents són tots racionals. Calcula'ls (dóna el resultat en forma de fracció):
- a)  $\sqrt{\frac{8}{18}}$       b)  $\sqrt[3]{\frac{2}{16}}$       c)  $\sqrt{\frac{50}{98}}$       d)  $\sqrt[3]{\frac{3}{81}}$
37. Expressa en forma de potència:
- a)  $\sqrt[3]{7}$       b)  $\sqrt[4]{a^3}$       c)  $\sqrt{10}$   
 d)  $\sqrt[5]{(a+2)^2}$       e)  $\sqrt[6]{b^5}$       f)  $\sqrt{\frac{1}{5}}$
38. Expressa en forma d'arrel:
- a)  $25^{\frac{1}{3}}$       b)  $12^{\frac{1}{4}}$       c)  $a^{\frac{3}{5}}$       d)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-2}{3}}$       e)  $b^{\frac{2}{7}}$
39. Les potències d'exponent fraccionari verifiquen totes i cadascuna de les propietats de les potències d'exponent enter. Aplica aquestes propietats per expressar en funció d'una sola potència:
- a)  $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$       b)  $3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{1}{4}}$       c)  $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2$       d)  $\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}}$
40. Utilitza la calculadora i aproxima fins als centèsims els nombres irracionals següents:
- a)  $\sqrt[3]{10}$       b)  $\sqrt[5]{276}$       c)  $\pi^{\frac{1}{4}}$   
 d)  $\sqrt[3]{-50}$       e)  $5^{\frac{2}{3}}$       f)  $\sqrt[7]{2^4}$
41. Simplifica:
- a)  $\sqrt[12]{a^{10}}$       b)  $\sqrt[3]{a^{12}}$       c)  $\sqrt[15]{3^{10}}$       d)  $\sqrt[4]{64}$
42. Digues si les següents igualtats són certes o falses:
- a)  $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$   
 b)  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$   
 c)  $\sqrt{a^2 + b^2} = a+b$

43. Expressa en forma d'una sola potència:

a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

b)  $\sqrt[3]{5} \div 5^{\frac{1}{4}}$

c)  $(\sqrt[4]{b^3})^2$

44. Expressa en forma d'una sola arrel:

a)  $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

b)  $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$

c)  $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt{4}}$

d)  $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{15}}$

e)  $(\sqrt[3]{2^3})^4$

f)  $3^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{2}$

g)  $(a + b)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a - b}$

h)  $\sqrt{\sqrt{13}}$

i)  $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}}$

45. Expressa de la forma més senzilla possible (una sola arrel):

a)  $\sqrt{10} + 2\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{10}$

e)  $\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[12]{10}}$

b)  $3\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 7\sqrt{3}$

f)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

c)  $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{2}$

g)  $\frac{\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{b}}$

d)  $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63}$

h)  $\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}$

46. Racionalitza i simplifica, si és possible, el resultat:

a)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

b)  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

c)  $\frac{12}{\sqrt{2}}$

d)  $\frac{22}{4 - \sqrt{5}}$

47. Racionalitza i simplifica si és possible:

a)  $\frac{20}{\sqrt{10}}$

b)  $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

c)  $\frac{6 + \sqrt{6}}{6 - \sqrt{6}}$

48. Escriu en forma logarítmica aquestes igualtats:

a)  $6^2 = 36$

e)  $(\sqrt{2})^4 = 4$

b)  $4^{-3} = \frac{1}{64}$

f)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$

c)  $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

g)  $7^3 = 343$

d)  $2^5 = 32$

h)  $0'5^2 = 0'25$

49. Escriu en forma exponencial aquestes igualtats:

a)  $\log_{\frac{1}{3}} 243 = -5$

b)  $\log_{10} 1000 = 3$

c)  $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

d)  $\log_5 125 = 3$

e)  $\log_{0.1} 0.01 = 2$

f)  $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$

g)  $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

h)  $\log_{\frac{2}{5}} \frac{16}{625} = 4$

50. Calcula sense fer servir la calculadora:

a)  $\log_2 32 =$

b)  $\log_5 25 =$

c)  $\log 10^8 =$

d)  $\log_2 (-4) =$

e)  $\log_7 7^6 =$

f)  $\log_a a^3 =$

g)  $\ln e^4 =$

h)  $\ln \sqrt[3]{e} =$

i)  $\log_2 \frac{1}{8} =$

j)  $\log 0.001 =$

k)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} =$

l)  $\log_{234} 1 =$

51. Calcula el valor de  $x$  en cada cas:

a)  $\log_2 4 = x$

b)  $\log_x 27 = 3$

c)  $\log_3 x = \frac{1}{2}$

d)  $\log_5 1 = x$

e)  $\log_x 25 = 2$

f)  $\log x = -4$

g)  $\ln x = 3$

h)  $\log_7 x = 0$

52. Si  $\log a = 3$ ,  $\log b = 5$  i  $\log c = -2$ , calcula:

a)  $\log(a^2 \cdot b \cdot c^2)$

b)  $\log \frac{b^2}{\sqrt{c}}$

c)  $\log \frac{\sqrt{a} \cdot b}{c}$

53. Sabem que  $\log 2 = 0.3010$  i  $\log 3 = 0.4771$ . Utilitza aquests valors i les propietats dels logaritmes per calcular:

a)  $\log 6$

b)  $\log 144$

c)  $\log \frac{8}{81}$

54. Escriu mitjançant un sol logaritme:

a)  $3 \log 5 + \frac{1}{2} \log 9$

b)  $\log_3(x^2 + 2x + 1) - \log_3(x + 1)$

c)  $5 \ln x - \frac{1}{2} \ln y + 3 \ln z$

55. Resol les següents equacions:

a)  $2^x = 7$

b)  $3^x = 25$

c)  $4^x = 70$

d)  $e^x = 4$

56. Escriu en forma logarítmica les següents igualtats i calcula  $x$  en cada cas:

a)  $\log_3 6 = x$

b)  $\log_5 37 = x$

c)  $\log_2 200 = x$

d)  $\log_7 5 = x$

57. Resol les següents equacions:

a)  $2^{x+2} = 135$

b)  $5^{x+1} = 78$

c)  $5 \cdot 3^x = 8$

d)  $2 \cdot 7^{x-3} = 300$

e)  $6^x + 6^{x+1} + 6^{x+2} + 6^{x+3} = 259$

f)  $3^{2x^2-5x-3} = 1$

g)  $7 \cdot 6^{x+2} = 32$

h)  $2 \cdot e^{x-4} = 3$

i)  $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 112$